数理解析研究所講究録
320巻 1978年 46-51

C^*環に作用するある種の作用素が生成するバナハ環の半単純性

東北大 教養　岡安隆照

フォン・ノイマン環Mの正規元a, bと，それらのスペクトル$Sp(a)$, $Sp(b)$の上で定義された複素数値連続関数f_j, g_j $(j=1,\cdots,n)$に対して，M上の作用素

$$\tau: x \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} f_j(a)\, x\, g_j(b)$$

を考える．そしてこれがMの強稠密部分C^*環Aを不変にしているとする．このときτをAに制限して得られるA上の作用素$\tau|_A$は，Aの恒等作用素ι_Aと共にどんなバナハ環を生成するであろうか．Mが semi-finite ならばそれが半単純になることを示すのがこの講演の目的である．

1. 先ず次の補題から出発する：

<u>補題</u> (cf. [1, Remark, p.165], [2, Lem.2.3.10], [3: Th.10])

$$Sp_{B(M)}(\tau) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcup_{e\in C} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{matrix} \lambda \in Sp_{Me}(ae) \\ \mu \in Sp_{Me}(be) \end{matrix} \right\},$$

ここに$\mathcal{C}$はMに関する1の有限中心分割（即ち，互いに直交し，和が1であるようなMの中心射影$\neq 0$の有限集合）の集合である．

≦は容易である．いま右辺からνをとり，任意に$\varepsilon>0$を与える．$Sp(a)$の有限ボレル分割Γ，$Sp(b)$の有限ボレル分割Δが

$$\lambda\in\gamma\in\Gamma \longrightarrow \|(f_j(a)-f_j(\lambda))e_a(\gamma)\|<\varepsilon,\ かつ$$
$$\mu\in\delta\in\Delta \longrightarrow \|e_b(\delta)(g_j(b)-g_j(\mu))\|<\varepsilon,$$
$$j=1,\cdots,n$$

を満たして存在する．ここにe_a，e_bはそれぞれa，bのスペクトル測度である．このΓ，Δに対して$C\in\mathcal{C}$を

$$e\in C \longrightarrow e\leqq z(e_a(\gamma))\ 又は\ ez(e_a(\gamma))=0\ \forall\gamma\in\Gamma,\ かつ\ e\leqq z(e_b(\delta))\ 又は\ ez(e_b(\delta))=0\ \forall\delta\in\Delta$$

となるように細かくとれば，ある$e\in C$に対して

$$\nu=\sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda)g_j(\mu),\quad \begin{matrix}\lambda\in Sp_{Me}(ae)\\ \mu\in Sp_{Me}(be)\end{matrix}$$

である一方，$\lambda\in\gamma\in\Gamma$なる$\gamma$と$\mu\in\delta\in\Delta$なる$\delta$とに対して$0\neq e\leqq z(e_a(\gamma))z(e_b(\delta))$である．従って$M$の partial isometry $v\neq 0$で，$vv^*\leqq e_a(\gamma)$，$v^*v\leqq e_b(\delta)$を満たすものがある．このvに対して

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j(a)vg_j(b)-\nu\Big\|\leqq \sum_{j=1}^{n}\big(\|(f_j(a)-f_j(\lambda))e_a(\gamma)\|\|g_j(b)\|+|f_j(\lambda)|\|e_b(\delta)(g_j(b)-g_j(\mu))\|\big)$$
$$\leqq \varepsilon n\big(\max_j|f_j(\lambda)|+\max_j\|g_j(b)\|\big)$$

である．右辺はいか程でも小さく出来るから$\nu\in Sp_{B(M)}(\tau)$である．

2．Bを$\tau|_A$とι_Aが生成したバナッハ環とする．$\tau|_A$がBで正則ならτも$B(M)$で正則でτ^{-1}はMの有界部分で強連続で

あることがわかる： $\sigma = (\tau|_A)^{-1} \in \mathcal{B}$ であるから，複素数係数の多項式の列 $\{p_\nu\}$ で $\sigma_\nu = p_\nu(\tau)|_A \xrightarrow[\|\ \|]{} \sigma$ を満たすものが存在する．いま有界な $\{x_\alpha\} \subset A$ が 0 に強収束しているとすれば任意の ν と任意のベクトル ξ に対して

$$\|\sigma(x_\alpha)\xi\| \leqq \|(\sigma-\sigma_\nu)(x_\alpha)\xi\| + \|\sigma_\nu(x_\alpha)\xi\| \leqq \|\sigma-\sigma_\nu\|\|\xi\|\sup_\alpha\|x_\alpha\| + \|\sigma_\nu(x_\alpha)\xi\|$$

であるから，$\overline{\lim_\alpha}\|\sigma(x_\alpha)\xi\| = 0$ である．換言すれば $\sigma(x_\alpha) \xrightarrow[\text{強}]{} 0$．よって σ は A の有界部分で M の強位相に関して連続であることがわかった．そうすると Kaplansky の稠密定理を利用して σ を M 上に拡張できる．実際任意の $x \in M$ に対して有界な $\{x_\alpha\} \subset A$ で x に強収束するものがあるが，$\{\sigma(x_\alpha)\}$ が有界かつ強 Cauchy 列になるから，M におけるその強極限を $\tilde\sigma(x)$ とおけば $\tilde\sigma$ は σ の拡張である．のみならず，$\sigma\tau|_A = \tau|_A\sigma = \iota_A$ から $\tilde\sigma\tau = \tau\tilde\sigma = \iota$ である．更に $p_\nu(\tau)$ が $\tilde\sigma$ にノルム収束することもわかり，$\tilde\sigma$ は M の有界部分で強連続になる．

3．φ を M_+ 上の faithful normal semi-finite trace，$\mathfrak{m}$ をその定義イデアル，$\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{m}$ の平方根，η を $\mathfrak{n}$ から $H = L^2(M, \varphi)$ への injection，$\pi(a), \pi'(a)$ $(a \in M)$ を

$$\pi(a)\eta(x) = \eta(ax),\quad \pi'(a)\eta(x) = \eta(xa),\quad x \in \mathfrak{n}$$

によって定まる H 上の作用素とする．$\sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a))\pi'(g_j(a))$ が H 上の正規作用素であることは自明であるが，1-2節の議論から

更に

$$
\begin{aligned}
sp_{\mathcal{B}}(\tau|_A) &\geqq sp_{\mathcal{B}(M)}(\tau) \\
&= \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcup_{e\in C} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in sp_{M_e}(a_e) \\ \mu \in sp_{M_e}(b_e) \end{array} \right\} \\
&= \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcup_{e\in C} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in sp(\pi(a)_{\pi(e)}) \\ \mu \in sp(\pi'(b)_{\pi'(e)}) \end{array} \right\} \\
&\geqq sp\left(\sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a)) \pi'(g_j(b)) \right)
\end{aligned}
$$

である．従って

$$\|\tau|_A\| \geqq \|\tau|_A\|_{sp} \geqq \left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a))\pi'(g_j(b)) \right\|_{sp} = \left\| \sum_{j=1}^{n} \pi(f_j(a))\pi'(g_j(b)) \right\|$$

である．右辺の $\|\ \|$ の中味を $\Phi(\tau|_A)$ と書くことにする．さて $\sigma\in\mathcal{B}$, $\|\sigma\|_{sp}=0$ としよう．すると複素数係数の多項式の列 $\{p_\nu\}$ があって $\sigma_\nu = p_\nu(\tau)|_A \xrightarrow[\|\ \|]{} \sigma$ を満たす．よって $\{\sigma_\nu\}$ は Cauchy 列である．σ_ν は上の $\tau|_A$ と同じ形をもつから上の不等式を満たす．従って $\{\Phi(\sigma_\nu)\}$ もまた Cauchy 列である．よって H 上のある正規作用素 $\tilde{\Phi}(\sigma)$ にノルム収束する．このときスペクトルの連続性によって

$$\|\sigma\| \geqq \|\sigma\|_{sp} \geqq \|\tilde{\Phi}(\sigma)\|$$

が成り立っている．故に $\tilde{\Phi}(\sigma)=0$ である．ところで前節における議論と同様に $\{p_\nu(\tau)\}$ は $\hat{\sigma}|_A=\sigma$ なる $\hat{\sigma}\in\mathcal{B}(M)$ にノルム収束することがわかる．それは M の有界部分で弱連続である．任意の $x\in\mathcal{M}$ を固定しよう．$p_\nu(\tau)(x) \xrightarrow[\|\ \|]{} \hat{\sigma}(x)$ かつ $\eta(p_\nu(\tau)(x)) = \Phi(\sigma_\nu)\eta(x) \xrightarrow[\|\ \|]{} 0$ であるから，φ が σ 弱下半連続であることにより

$$0 \leqq \varphi(\tilde{\delta}(x)^*\tilde{\delta}(x)) \leqq \varliminf_{\nu} \varphi(p_\nu(\tau)(x)^* p_\nu(\tau)(x)) = \varliminf_{\nu} \|\eta(p_\nu(\tau)(x))\|^2 = 0.$$

故に $\tilde{\delta}(x) \in \mathfrak{n}$ であるのみならず $\eta(\tilde{\delta}(x)) = 0$, 従って又 $\tilde{\delta}(x) = 0$ である. $\mathfrak{n}$ が M で σ 弱稠密であることから $\tilde{\delta} = 0$ である. 従って特に $\delta = 0$ である. よって目的の定理が示された:

<u>定理</u>　B は半単純である.

4.　C^*環 A の有界微分や弱内部自己同型写像は上に述べた $\tau|_A$ の形をしている. このことが $\tau|_A$ をとりあげた理由である. ここでは応用を2つほど:

<u>系1.</u>　C^*環 A の *微分 δ が ι_A と共に生成するバナハ環は半単純である.

<u>系2.</u>　C^*環 A の正規自己同型写像 α（即ち $\alpha'\alpha = \alpha\alpha'$ を満たす自己同型写像, ここに $\alpha'(x^*) = \alpha^{-1}(x)^*$, $x \in A$ [4]）が"十分多くの A の極大イデアルを不変にすれば", それが ι_A と共に生成するバナハ環は半単純である.

証明は省く.

なお以上述べてきた議論は Størmer [5] と深い関係をもっている.

文　献

1. D. Buchholz and J. E. Roberts, Comm. Math. Phys. 49 (1976), 161–177.

2. A. Connes, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 6 (1973), 133–252.

3. G. Zummer and M. Rosenblum, Proc. AMS 10 (1959), 32–41.

4. T. Okayasu, Tôhoku Math. J. 26 (1974), 541–554.

5. E. Størmer, On spectral subspaces of automorphisms, To appear.